

Peubah Acak

Bahan Kuliah *II2092 Probabilitas dan Statistik*
Oleh: Rinaldi Munir
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

Definisi Peubah Acak

- Peubah = variabel
- Dalam suatu eksperimen, seringkali kita lebih tertarik bukan pada titik sampelnya, tetapi *gambaran numerik dari hasil*.
- Misalkan pada pelemparan sebuah koin dua kali, berapa banyak sisi angka (A) yang muncul?

$$S = \{AG, AA, GA, GG\}$$

$$1 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

Seringkali amat penting mengaitkan suatu bilangan sebagai pemerian hasil tersebut.

$$x \rightarrow f(x) = ?$$

- Misalkan untuk setiap titik di dalam ruang sampel kita memasang sebuah bilangan. Dengan demikian terdefinisikan sebuah fungsi pada ruang sampel tersebut.
- Fungsi tersebut dinamakan **peubah acak** atau **fungsi acak**.
- Nama lain: **peubah stokastik** atau **fungsi stokastik**.

Definisi. Suatu fungsi bernilai riil yang harganya ditentukan oleh tiap titik di dalam ruang sampel dinamakan peubah acak.

Peubah acak \rightarrow huruf besar, misal X
nilai peubah acak \rightarrow huruf kecil misal x

- **Contoh 1.** Pada pelemparan sebuah koin dua kali:

$$S = \{AG, AA, GA, GG\}$$

X menyatakan banyaknya sisi angka (A) yang muncul

Untuk setiap titik sampel kita mengasosiasikan suatu bilangan untuk X

Titik Sampel	AG	AA	GA	GG
X	1	2	1	0

- Contoh peubah acak lain: kuadrat banyaknya sisi angka (A), banyaknya sisi angka dikurangi sisi gambar (G).
- Peubah acak yang nilai-nilainya berhingga banyaknya atau berisi sederetan anggota yang banyaknya sebanyak *integer* disebut **peubah acak diskrit**.
- Sebaliknya, peubah acak yang nilai-nilainya tak berhingga banyaknya atau berisi sederetan anggota yang banyaknya sebanyak titik dalam sebuah garis disebut **peubah acak kontinu**.

- Sering lebih mudah menyatakan peluang suatu peubah acak X dinyatakan dalam suatu formula atau rumus. Rumus itu merupakan fungsi dari nilai numerik x , misalnya $f(x)$, $g(x)$, $s(x)$, dan sebagainya

Ditulis:

$$f(x) = P(X = x)$$

Fungsi $f(x)$ dinamakan **fungsi peluang** atau **distribusi peluang**.

Definisi. Fungsi $f(x)$ adalah **fungsi peluang** atau **distribusi peluang** suatu peubah acak diskrit X , bila untuk setiap hasil x yang mungkin berlaku:

1) $f(x) \geq 0$

2) $\sum_x f(x) = 1$

3) $P(X = x) = f(x)$

- Pada Contoh 1,

Titik Sampel	AG	AA	GA	GG

X	1	2	1	0

$$P(AA) = P(AG) = P(GA) = P(GG) = \frac{1}{4}$$

$$\text{maka } f(0) = P(X = 0) = P(GG) = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = P(X = 1) = P(AG \cup GA) = P(AG) + P(GA) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = P(X = 2) = P(AA) = \frac{1}{4}$$

Jadi, fungsi peluang diskritnya adalah

x	0	1	2

f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- **Contoh 2.** Hitunglah distribusi peluang jumlah bilangan yang muncul bila 2 buah dadu dilemparkan.

Jawaban:

Misalkan X adalah peubah diskrit yang menyatakan semua jumlah yang mungkin

Nilai x yang mungkin adalah 2 sampai 12

Jumlah titik sampel: $(6)(6) = 36$

Peluang setiap titik sampel = $(1/6)(1/6) = 1/36$

$f(2) = P(X = 2) = 1/36 \rightarrow$ titik sampel (1, 1)

$f(3) = P(X = 3) = 2/36 \rightarrow$ titik sampel (1, 2), (2, 1)

$f(4) = P(X = 4) = 3/36 \rightarrow$ titik sampel (1, 3), (2, 2), (3, 1)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$f(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

- **Contoh 3.** Carilah rumus distribusi peluang banyaknya sisi angka (A) yang muncul bila satu buah koin dilempar sebanyak 4 kali.

Jawaban:

Misalkan X adalah peubah diskrit yang menyatakan banyaknya sisi angka yang muncul dari pelemparan dadu 4 kali.

Nilai x yang mungkin adalah 0, 1, 2, 3, 4

Jumlah titik sampel = $(2)(2)(2)(2) = 16$

Banyaknya sisi angka yang muncul = $C(4, x)$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$

jadi, fungsi peluangnya adalah

$$\begin{aligned} f(x) &= C(4, x)/16 = 4!/\{16(4-x)!\} \\ &= 24/\{16(4-x)!\} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

- **Contoh 4.** Dari pengiriman 8 pesawat TV ke sebuah dealer diketahui 3 diantaranya cacat. Jika sebuah hotel membeli 2 pesawat TV dari dealer, cari distribusi peluang banyaknya TV cacat yang diterima hotel tersebut.

Jawaban:

Misalkan X adalah peubah diskrit yang menyatakan banyaknya TV yang rusak yang terbeli oleh hotel tersebut.

Nilai x yang mungkin adalah 0, 1, dan 2

Jumlah titik sampel = $C(8, 2)$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{C(3,0)C(5,2)}{C(8, 2)} = \frac{10}{28}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{C(3,1)C(5,1)}{C(8, 2)} = \frac{15}{28}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{C(3,2)C(5,0)}{C(8, 2)} = \frac{3}{28}$$

Jadi, distribusi peluang X adalah:

x	0	1	2
f(x)	10/28	15/28	3/28

- **Latihan.** Dari suatu kotak yang berisi 4 bola hitam dan 2 bola hijau, 3 buah bola diambil secara berturutan, tiap bola dikembalikan sebelum pengambilan berikutnya. Carilah distribusi peluang banyaknya bola hijau yang terambil.

Distribusi Kumulatif

- Seringkali kita membutuhkan nilai peubah acak X lebih kecil atau sama dengan suatu bilangan riil tertentu (x), yaitu $P(X \leq x)$. Ini kita sebut **distribusi kumulatif** dan disimbolkan dengan $F(x)$.

- **Definisi.** Distribusi kumulatif $F(x)$ suatu peubah acak diskrit dengan distribusi peluang $f(x)$ dinyatakan oleh

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

- Distribusi kumulatif sering disingkat **fungsi distribusi** saja. Jadi, fungsi distribusi = fungsi kumulatif.

- Dari contoh 4, $F(1.5) = P(X \leq 1.5) = f(0) + f(1) = 10/28 + 15/28 = 25/28$.
- Jika X hanya memiliki x_1, x_2, \dots, x_n yang berhingga, maka fungsi distribusinya adalah

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + \dots + f(x_n) & x \geq x_n \end{cases}$$

- Dari Contoh 4, fungsi distribusinya adalah

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 10/28 & 0 \leq x < 1 \\ 25/28 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

- Hitung $f(1)$ dari fungsi distribusi di atas!

Jawab: karena $F(1) = F(0) + f(1)$, maka

$$f(1) = F(1) - F(0) = 25/28 - 10/28 = 15/28$$

- **Latihan.** Dari Contoh 3, tentukan fungsi distribusinya, lalu gunakan fungsi distribusi itu untuk menghitung $f(3)$.

Grafik Distribusi Peluang

- Distribusi peluang untuk peubah acak diskrit secara geometri dapat digambarkan dengan **diagram batang** dan **histogram**.
- Misalkan $f(0) = 1/16$, $f(1) = 1/4$, $f(2) = 3/8$, $f(3) = 1/4$, dan $f(4) = 1/16$ dan fungsi distribusi berbentuk:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1/16 & , 0 \leq x < 1 \\ 5/16 & , 1 \leq x < 2 \\ 11/16 & , 2 \leq x < 3 \\ 15/16 & , 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

- Diagram batang dan histogram dari distribusi peluang dibentuk dengan menggambarkan titik $(x, f(x))$.

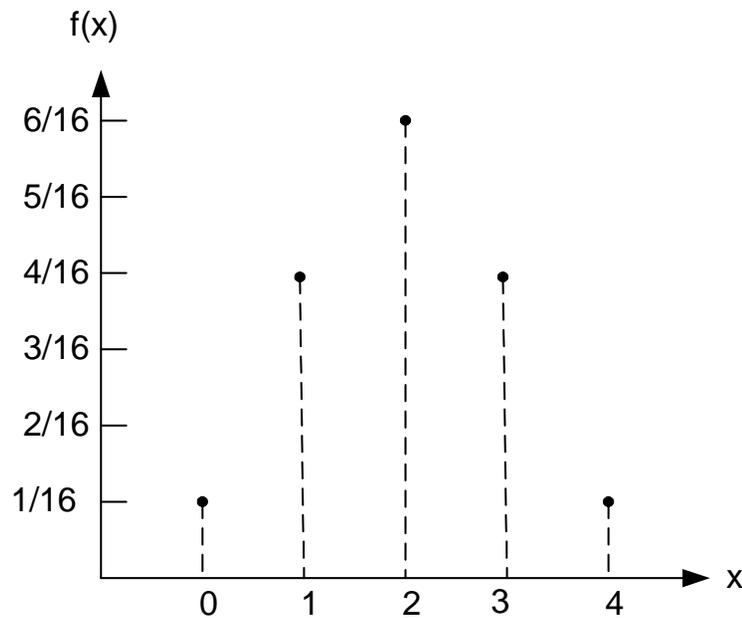
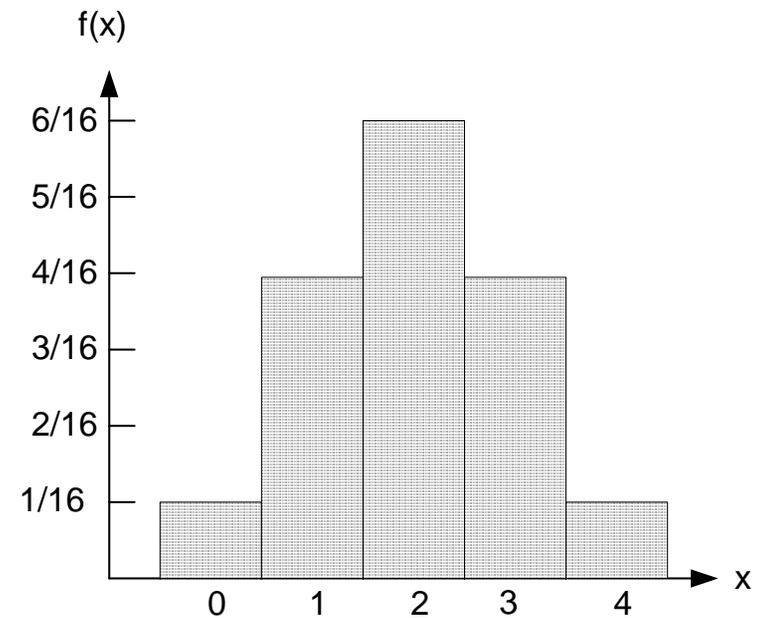


Diagram batang



Histogram

- Untuk fungsi distribusi (distribusi kumulatif), grafiknya berbentuk tangga sehingga dinamakan **fungsi tangga**.

